

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**Clasa a X-a**

- Timp de lucru 180 de minute
- Fiecare problemă se punctează cu 0-7 puncte

**Problema 1.**

- (a) Arătați că, dacă  $u = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ , atunci numărul  $t = 6u - u^3$  este întreg
- (b) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care mulțimea  $M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{n}\}$  conține exact 5 numere raționale.

**Problema 2.** Se consideră numerele  $a = \log_{18} 24$ ,  $b = \log_6 12$  și  $c = \log_2 24$

- (a) Arătați că  $b + c > 5$
- (b) Exprimați  $b$  în funcție de  $a$ .

*SGM 11/2024, enunț modificat*

**Problema 3.**

- (a) Demonstrați că nu există funcții injective  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că

$$f(2^x) + f(4^x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

*SGM 10/2024*

- (b) Demonstrați că funcția  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z + 3 \cdot \bar{z}$  este bijectivă.

**Problema 4.** Se consideră o mulțime  $M$  de numere complexe care are următoarele proprietăți:

- (a)  $-1 \in M$ ;
- (b) Dacă  $z \in M$ , atunci  $(z^2 + 1) \in M$ ;
- (c) Dacă  $z^2 \in M$ , atunci  $z \in M$ ;

Arătați că  $\{0, 1, 2, 2025\} \subset M$ .

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, Caraș-Severin, 08.02.2025**  
**Barem de evaluare și notare, Clasa a X-a**

**Problema 1.**

- (a)  $u^3 = 6 + 3 \cdot \sqrt[3]{8} \cdot u = 6 + 6u \Rightarrow t = 6u - u^3 = -6 \in \mathbb{Z}$  (4p)
- (b) Primele 6 numere raționale de forma  $\sqrt[3]{k}$  sunt  $1, 2, 3, 4, 5 = \sqrt[3]{125}$  și  $6 = \sqrt[3]{216}$ , așadar  $n \in \{125, 126, \dots, 215\}$  (3p)

**Problema 2.**

- (a)  $b + c = 1 + \log_6 2 + 2 + \log_6 2 > 3 + 2 = 5$  (3p)
- (b) Exprimați  $b = \frac{3a + 1}{a + 2}$  (4p)

**Problema 3.**

- (a) Pentru  $x = 1$ , respectiv  $x = \frac{1}{2}$ , se ajunge la  $f(\sqrt{2}) = f(4)$ , deci  $f$  nu este injectivă. (3p)
- (b) pentru  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , avem  $f(z) = 4x - 2yi$  și astfel pentru orice  $w = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \mathbb{C}$ , există un unic  $z = x + yi \in \mathbb{C}$ , cu  $x = \frac{a}{4}$ ,  $y = -\frac{b}{2}$  așa încât  $f(z) = w$ . (4p)

**Problema 4.**

$i^2 = -1 \in M \xRightarrow{(c)} i \in M$  și (b) conduce la  $0 \in M$  (1p)

Din (b) obținem acum și  $1 \in M$  (1p)

apoi  $2 \in M$  (1p)

Pe de altă parte avem că, dacă  $(\sqrt{n})^2 = n \in M$ , cu  $n \in \mathbb{N}$ , atunci  $\sqrt{n} \in M$  și din (b) :  $n+1 \in M$ .

Așadar inductiv am arătat că  $M$  conține toate numerele naturale, deci în particular

$2025 \in M$  (4p)